Asintoti orizzontali: definizione ed esempio

Prof. Stefano Spezia

Definizione

DEF. Data una funzione $y = f(x)$ e $x_0 \in \{-\infty, +\infty\} \cap F\big(dom(f)\big)$ un punto di frontiera all'infinito del suo dominio, si dice che la funzione $y = f(x)$ ha come asintoto orizzontale la retta di equazione cartesiana $y = l$ se esiste unico e finito il limite della funzione $y = f(x)$ per x che tende a x_0 ed è uguale ad l. In simboli,

$$y = l \text{ è un asintoto orizzontale per } y = f(x) \text{ se}$$
$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l, \text{ con } |l| < +\infty.$$

N.B.: Per la ricerca degli asintoti orizzontali in una funzione razionale fratta è necessario calcolare sempre i due limiti a più e meno infinito della funzione.

Esempio: $f(x) = \frac{x}{x^2-6x+8}$

Calcolo del limite a meno infinito

$$f(x) = \frac{x}{x^2-6x+8}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-6x+8} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{x^2} =$$

$\frac{6}{x} \to 0$ $\quad \frac{8}{x^2} \to 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad y = 0$$

è l'eq. cart. dell'asintoto orizzontale

Calcolo del limite a più infinito

$$f(x)=\frac{x}{x^2-6x+8}$$

Similmente per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-6x+8}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}^{1}}{\cancel{x^2}}=$$

$\frac{6}{x}\to 0$ $\frac{8}{x^2}\to 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad y=0$$ è l'eq. cart. dell'asintoto orizzontale